- EXERCICE 28.7 -

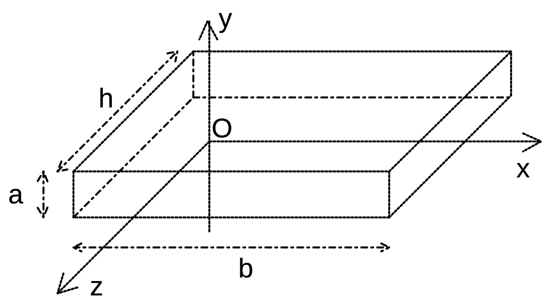
● **ENONCE :** « Pertes dans un métal feuilleté »

Un métal est feuilleté en tôles identiques de forme parallélépipédique rectangle, de dimensions a, b et h ; le repère (Oxyz), lié à une tôle, a pour origine le centre O du parallélépipède et pour axes les axes de symétrie (figure 1.a) ; la conductivité de la tôle est notée g .

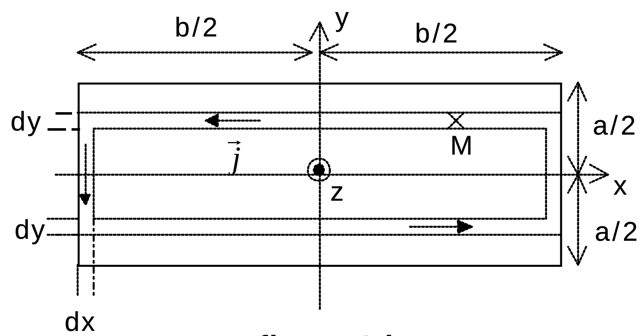
Le métal est soumis à un champ magnétique sinusoïdal de faible fréquence, dont le vecteur est : $\vec{B} = B_m \sin(wt)\vec{e}_z$

où B_m est un scalaire positif indépendant du temps et des coordonnées d'espace.

Dans ces conditions, le métal est le siège de courants de Foucault : on se propose d'évaluer la puissance dissipée par ces courants dans une tôle. Compte tenu de la direction de $\vec{B}$ et de la forme de la tôle, on considère le **modèle** suivant, où les courants circulent dans des éléments de tôle tels que celui représenté sur la figure 1.b :



- figure 1.a -



- figure 1.b -

- ses dimensions sont : b dans la direction Ox, 2y dans la direction Oy et h dans la direction Oz.
- La section du conducteur est hdy.

1) a) Calculer la force électromotrice $e(t)$ dans l'élément de tôle à l'instant t.

b) La fréquence du champ magnétique étant faible, l'hypothèse des régimes lentement variables est valide ; dans ces conditions, déterminer le champ induit $\vec{E}(M,t)$ au point M courant de l'élément de tôle, à l'aide du potentiel-vecteur $\vec{A}$ dont dérive $\vec{B}$.

On admettra que l'on peut calculer $\vec{A}$ selon : $\vec{A}(M,t) = \frac{1}{2}\vec{B}(t) \wedge \overrightarrow{OM}$

c) Retrouver à partir de $\vec{E}(M,t)$ l'expression de $e(t)$.

2) a) Compte tenu de la réponse à la question 1.b, montrer que les lignes de courant $\vec{j}$ sont très simplifiées ; dans le cadre de ce modèle, écrire l'expression de la conductance dG de l'élément de tôle.

b) Calculer la puissance moyenne $\langle P_J(t)\rangle_t$ dissipée par effet Joule dans une tôle.

En déduire la puissance **volumique** moyenne p_J dissipée par effet Joule.

On donne : $\dfrac{y^2}{b+2y} = Ay + B + \dfrac{C}{b+2y}$, avec : $A = \dfrac{1}{2};\ B = -\dfrac{b}{4};\ C = \dfrac{b^2}{4}$

c) Examiner le cas, pour lequel le modèle est particulièrement bien adapté, où la tôle est très mince, $a \ll b$.

On rappelle que, au troisième ordre : pour $x \ll 1$, $Ln(1+x) = x - x^2/2 + x^3/3 + o(x^3)$

d) Indiquer comment peut être minimisée la puissance calculée à la question précédente, pour un champ magnétique donné.

3) Pour obtenir la dépense minimale de puissance, choisir entre l'aluminium et l'acier, et évaluer la densité de puissance dissipée correspondante avec :

- g (aluminium)= $3{,}7.10^7 U.S.I$; g (acier)= $3{,}17.10^5 U.S.I$
- $B_m = 0{,}1T;\ w = 100p\ rad.s^{-1};\ a = 2mm$

****

• **CORRIGE :** « Pertes dans un métal feuilleté »

1) a) Le flux à travers l'élément de tôle vaut : $\varphi = B_m \sin(wt) \times 2yb$

$\Rightarrow$ la relation de Faraday permet d'écrire : $\boxed{e = -\dfrac{d\varphi}{dt} = -2ybwB_m \cos(wt)}$

b) En utilisant la relation proposée, il vient :

$$\boxed{A_x(y,t) = -\frac{y}{2}B_m \sin(wt) \qquad A_y(x,t) = \frac{x}{2}B_m \sin(wt)}$$

Puis, avec $\vec{E}(M,t) = -\dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t}$, on obtient : $\boxed{E_x(y,t) = w\dfrac{y}{2}B_m \cos(wt) \qquad E_y(x,t) = -w\dfrac{x}{2}B_m \cos(wt)}$

c) Les plans xOz et yOz sont des plans de symétrie du champ magnétique $\vec{B}$; d'après la relation $\overrightarrow{rot}\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$, le champ induit $\vec{E}$ a un comportement **antisymétrique** vis-à-vis des plans de symétries de $\vec{B}$ $\Rightarrow$ lorsqu'on effectue une symétrie par rapport aux plans xOz et yOz, $\vec{E}$ est changé en l'opposé de son symétrique $\Rightarrow$ on obtient les relations suivantes :

$$E_x(y,t) = -E_x(-y,t) \quad \text{et} \quad E_y(x,t) = -E_y(-x,t)$$

En faisant circuler le champ induit sur le rectangle délimitant l'élément de tôle, il vient :

$$\boxed{e = -2\times\int_{-b/2}^{b/2} w\frac{y}{2}B_m \cos(wt)dx - 2\times\int_{-y}^{y} w\frac{b}{4}B_m \cos(wt)dy = -2wybB_m \cos(wt)}$$

ce qui correspond effectivement à la fem calculée précédemment.

2) a) Le modèle suppose que les lignes de courant $\vec{j} = g\vec{E}$ sont soit parallèles à Ox, soit parallèles à Oy : en réalité, $\vec{E}$ (donc $\vec{j}$) a **deux** composantes E_x et E_y , sauf en x=0 et y=0.

Dans le cadre du modèle, on peut appliquer la relation donnant la conductance d'un tronçon de conducteur droit :

$$\boxed{dG = g\times\frac{S}{L} = g\times\frac{hdy}{2b+4y}}$$

b) La puissance instantanée se calcule selon :

$$P_J(t) = \int_{tole} dG\times e^2(t) = \int_0^{a/2} 4g\,hb^2w^2B_m^2\cos^2(wt)\times\frac{y^2}{2b+4y}dy \;\Rightarrow\; \langle P_J(t)\rangle_t = \int_0^{a/2} g\,hb^2w^2B_m^2\times\frac{y^2}{b+2y}dy$$

Avec les indications de l'énoncé, il vient :

$$\int_0^{a/2}\frac{y^2}{b+2y}dy = \left[\frac{y^2}{4} - \frac{b}{4}\times y + \frac{b^2}{8}\times Ln\left(1+\frac{2y}{b}\right)\right]_0^{\frac{a}{2}} = \frac{b^2}{8}\times\left[\frac{a^2}{2b^2} - \frac{a}{b} + Ln\left(1+\frac{a}{b}\right)\right]$$

Finalement : $$p_J = \frac{\langle P_J(t)\rangle_t}{abh} = g\frac{b^3}{8a}B_m^2w^2\left[\frac{a^2}{2ab^2} - \frac{a}{b} + Ln\left(1+\frac{a}{b}\right)\right]$$

On en déduit : $$\boxed{p_J = \frac{\langle P_J(t)\rangle_t}{abh} = g\,\frac{b^3}{8a}B_m^2 w^2\left[\frac{a^2}{2b^2} - \frac{a}{b} + Ln\left(1+\frac{a}{b}\right)\right]}$$

c) Au troisième ordre en a/b, on peut écrire :

$$Ln\left(1+\frac{a}{b}\right) \simeq \frac{a}{b} - \frac{a^2}{2b^2} + \frac{a^3}{3b^3} \quad \Rightarrow \quad \boxed{p_J = g\,\frac{a^2}{24}B_m^2 w^2 = g\,\frac{a^2}{6}B_m^2 p^2 f^2}$$

d) Les pertes sont proportionnelles à la conductivité g et au carré de l'épaisseur a, ce qui exige l'emploi de tôles de **faible conductivité** et de **faible épaisseur**.

3) La conductivité de l'acier étant inférieure à celle de l'aluminium, il faut utiliser des tôles en **acier** ; l'application numérique conduit à :

$$\boxed{p_J(\text{acier}) = 52{,}1\ W.m^{-3}} \qquad \text{et} \qquad \boxed{p_J(\text{aluminium}) = 6100\ W.m^{-3}}$$

****